1993

ДВАДЕСЕТ И ЧЕТВЪРТАТА АВСТРИЙСКА ОЛИМПИАДА

Поредният кръг на австрийската олимпиада за напреднали в областта Шаермарк се проведе от 17 до 19. 05. 1993 г. в замъка Зеггау, близо до град Лайбниц. Любезните домакини бяха поканили като участници в олимпиадата и по 4 ученици от: МГ „Баба Тонка“ в Русе; гимназията в гр. Мишколц, Унгария; Немската гимназия в Тимишоара, Румъния и Математическата гимназия във Варшава, Полша. За съжаление последните не пристигнаха по финансови причини. Така областната олимпиада стана и една интересна международна проява, на която се срещнаха ученици и учители по математика от 4 страни. Участието на учениците от МГ „Баба Тонка“ бе затруднено и от факта, че трима от тях трябваше да участват и на подборния кръг в София на 15 и 16 май. Госпожа Д. Панталеева, президент на фирма „Дунав–Майн–Рейн“, предостави самолетни билети на 4-мата ученици. За участието на нашите ученици в олимпиадата помогнаха и фирмите „Дунав–прес“ и „Димси–софт“, и господин Н. Тодоров със своя микробус.

Ето задачите, които учениците трябваше да решават 4 часа. Всяка от тях се оценява най-много с 8 точки.

Задача 1. Да се докаже, че за никое естествено число n, числото $n! + 19^{93}$ не е точен квадрат на естествено число.

Задача 2. Да се реши в множеството на реалните числа системата:

$$\left|\begin{array}{l} 3u - v = 4, \\ u^3 = v^2 = x + y, \\ x - y = 93. \end{array}\right.$$

Задача 3. Два еднакви правилни осмоъгълника имат обща страна PQ. За всяка права g през точка P е определено числото $l(g)$ като дължина на най-дългата отсечка от g, чиито точки не са външни за двата осмоъгълника. Да се намери най-малкото реално число L, такова, че $l(g) \leqq L$ за всички прави g през P. Има ли права, за която се достига равенство, и ако има коя е тя?

Задача 4. Дадена е редицата $\{a_n\}$, такава че

$$a_n = a_{n-1} + 17a_{n-2} + 15a_{n-3} \quad \text{за } n \geqq 3;\ a_0,\ a_1,\ a_2 > 0;\ a_0,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}.$$

Да се намери едно положително реално число q, за което съществуват положителни реални числа b и c, такива че $b.q^n < a_n < c.q^n$ за всяко n.

Кратки указания и решения

Задача 1. Задачата се решава като се използва сравнение по подходящ модул и се търси противоречие с допускането, че даденото число е точен квадрат. Например, ако $n \geqq 4$, то $n! + 19^{93} \equiv 3 \pmod 8$, а остатъците на точните квадрати по модул 8 са 0, 1 или 4. Така остават случаите $n = 1$ (например по модул 3), $n = 2$ (например модул 8) и $n = 3$ (например по модул 7). В решенията, предложени на проверяващите, беше отбелязано, че може да се разглежда и случаят $n = 0$.

Задача 2. Записваме системата във вида:

$$3.u - v = 4; \quad u^3 = x + y; \quad v^2 = x + y; \quad x - y = 93.$$

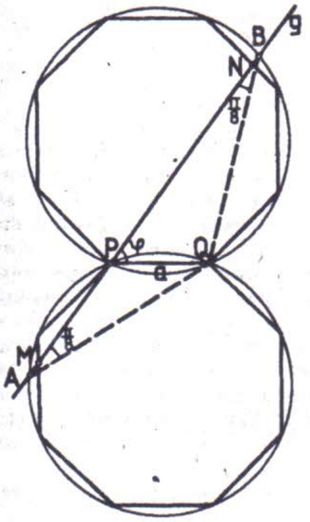
Тъй като $x + y = v^2$, т. е. $x + y \geqq 0$, полагаме $x + y = w^6$. Тогава имаме, че $u = w^2$ и $v = \pm w^3$. Заместваме в първото равенство и получаваме две уравнения за w:

$$\pm w^3 - 3w^2 + 4 = 0 \iff (w \pm 1)(w \pm 2)^2 = 0.$$

Крайният отговор е $x = 47$; $y = -46$; $u = 1$; $v = -1$ и $x = 78,5$; $y = -14,5$; $u = 4$; $v = 8$.

Задача 3. Ще използваме означенията на черт. 1. Нека g пресича осмоъгълниците в точки M и N, а описаните окръжности в точки A и B. Тогава $l(g) = MN \leqq AB = AP + PB$. Чрез синусова теорема намираме AP и BP:

$$AP = \frac{a \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{8}\right)}{\sin\frac{\pi}{8}}; \quad BP = \frac{a \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{8}\right)}{\sin\frac{\pi}{8}}; \quad \sphericalangle NPQ = \varphi,$$



Черт. 1

където a е страната на осмоъгълника. Следователно

$$MN \leqq \frac{a}{\sin\frac{\pi}{8}}\left[\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{8}\right)+\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{8}\right)\right]=$$

$$=2a\cot g\frac{\pi}{8}.\sin\varphi \leqq 2a\cot g\frac{\pi}{8}.$$

Равенство се достига, когато $\varphi = 90°$, т. е. $g \perp PQ$. Точно тогава M и N съвпадат съответно с A и B и $MN = 2a\cot g\frac{\pi}{8} = 2(1+\sqrt{2})a$. Търсеното число L е $2(1+\sqrt{2})a$, а равенство има, когато $g \perp PQ$.

Задача 4. Ще покажем, че $q = 5$ е едно такова число. За него например $b = \frac{1}{2}\min\left(a_0, \frac{a_1}{5}, \frac{a_2}{25}\right)$, а $c = 2\max\left(a_0, \frac{a_1}{5}, \frac{a_2}{25}\right)$, като очевидно $q > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.

Доказателството можем да извършим с математическа индукция.

I. $b < a_0 < c$; $b < \frac{a_1}{5} < c$; $b < \frac{a_2}{25} < c$.

II. Допускаме, че за $k < n$ е изпълнено $b < \frac{a_k}{5^k} < c$.

III. От допускането и от равенството $a_n = a_{n-1} + 17a_{n-2} + 15a_{n-3}$ получаваме, че $b < \frac{a_n}{5^n} < c$.

Оттук лесно следва, че $5^n.b < a_n < 5^n.c$.

Задачата може да се реши и като се намери формулата за общия член на редицата $a_n = A.5^n + B(-3)^n + C(-1)^n$ чрез характеристичното уравнение.

Участниците в олимпиадата бяха общо 58. Класирането на първите 10 ученици е следното:

		Точки				
		1	2	3	4	Общо
I награда:	1. Клеменс Хойбергер, Австрия	8	8	8	8	32
	2. Леонард Мада, Румъния	8	8	8	8	32
	3. Борислав Деянов, Русе	8	8	8	7	31
	4. Борис Димитров, Русе	8	8	7	8	31
	5. Андреас Кнаппе, Австрия	8	8	3	8	27
	6. Светлозар Станчев, Русе	8	7	4	6	25
II награда:	7. Щефан Хаусбергер, Австрия	7	8	3	6	24
	8. Венцислав Димитров, Русе	8	8	4	0	20
	9. Барбара Аухмайер, Австрия	7	8	2	3	20
	10. Евалд Рьосл, Австрия	8	8	4	0	20

Трябва да отбележим, че ученикът Клеменс Хойбергер е участвал в отбора на Австрия на МОМ в Москва, а ученикът Борислав Деянов — в отбора на България на Балканиадата в Кипър. Наградите бяха връчени от кмета на град Лайбниц. През следващите два дни гостите от чужбина имаха възможност да разгледат красивите околности на Лайбниц и забележителностите на областния център Грац.

Похвала заслужават и колегите Р. Раев от ВТУ „А. Кънчев" и М. Тъмназов за успешната работа с учениците съответно Борис Димитров и Борислав Деянов от 10. клас и Светлозар Станчев и Венцислав Димитров от 11. клас.

МИТКО КУНЧЕВ, Русе,
ЕРИХ ВИНДИШБАХЕР, Грац